Példa a **Hatvány, gyök, logaritmus** témakörből

A gyökjelek alól való kiemelés után hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

b) $\sqrt[4]{16a^5} - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{81a^5}$;

c) $\sqrt[5]{a^7 b} + \sqrt[5]{a^{12} b^6} - \sqrt[5]{a^2 b^6}$;

d) $\sqrt[4]{625a^6} - \sqrt[4]{81a^{10}} - \sqrt[4]{a^{14}}$;

e) $\sqrt[8]{a^{18} b^{23}} + \sqrt[8]{a^{10} b^{13}} - \sqrt[8]{a^{14} b^9}$;

Kezdjük a szavakkal:

a.) **gyökkitevő**= a gyökjel bal oldalán álló szám. A b) feladatban a gyökkitevő 4, a c) feladatban 5, … (ha nincs szám, az akkor 2-nek értendő, és négyzetgyöknek olvassuk $pl. \sqrt{5}$)
b.) **gyökjel**= egy gyökvonásnak nevezett művelet jele, ami azt a számot állítja elő, amelyet a jelölt gyökkitevőre emelve a gyökjel alatti számot kapjuk.

Példa: $\sqrt[3]{8}$ (úgy olvassuk, hogy „ harmadikgyök alatt 8, vagy gyakran azt is mondjuk, hogy köbgyök 8 a harmadikgyök helyett köbgyök szót használva"

$\sqrt[4]{81}$ „negyedikgyök alatt 81"

c.) **gyökjel alól való kiemelés**= egy szorzat esetén (pl 6*8) előfordul, hogy csak az egyik tényezőből (a szorzat egyik száma) tudunk gyököt vonni és azt örömünkben a gyökjel elé írjuk.
Példa: $\sqrt[3]{8}$-ból tudunk gyököt vonni, mert találunk olyan számot, amit ha harmadik hatványra emelünk (azért harmadik hatványra, mert a gyökkitevő 3), éppen 8-at kapunk (ami a gyökjel alatt van). Tehát $\sqrt[3]{8} = 2, mert\ 2^3 = 8$. DE!!! $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 * 2} = 2\sqrt[3]{2}$, mert a 8-ból tudunk gyököt vonni, ezt meg is tesszük (2), a másik tényezőből nem. Így amiből tudtam, kitesszük a gyökjel elé, és amiből nem, az bent marad. EZ A KIHOZATAL A GYÖKJEL ELÉ TÖRTÉNET.
d.) **egyszerűbb alak**= egy rövidebb, összevonás után keletkezett érték, például x+x+x egyszerűbb alakban 3x
e.) **nemnegatív számok**= a 0 és a pozitív számok közös neve, matematikai jellel $x \geq 0$ számok

MÉG VALAMI: (érdemes átnézni a hatványozás azonosságait!)

A hatványozásnál tanultunk egy ilyesmit, hogy:
$a^4 \cdot a = a^{4+1} = a^5$ $(mert\ ha\ a\ van, az\ a^1, amiben\ az\ 1 - es\ kitevőt\ nem\ szoktuk\ kiírni)$

És ez igaz **visszafele** is: $a^5 = a^4 \cdot a$

Szóval ebből a szorzatból negyedik gyököt vonva a kihozatal így működik:

$\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a} = a \cdot \sqrt[4]{a}$, ahol
$a > 0,$
$mert\ ha\ nem\ nagyobb, akkor\ nem\ tudnánk\ 4. gyököt\ vonni, mert\ negatív\ számból\ nem\ lehet$

$negyedik\ gyököt\ vonni, mert\ ha\ egy\ számot\ négyszer\ szorzok\ össze\ önmagával,$

$az\ előjel\ minden\ esetben\ pozitív$

(azért így bontottam fel az 5 kitevőt, mert így tudok kihozni a gyökjel elé)

Akkor ezek után nézzük a feladatokat:

(b.) Úgy alakítjuk a szorzatokat, hogy tudjunk gyököt vonni. A 16-ból és 81-ből tudunk negyedik gyököt vonni, értéke 2, illetve 3, az a-kból pedig úgy vonunk gyököt, ahogy előbb mutattam: $\sqrt[4]{16a^5} - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{81a^5} = \sqrt[4]{16a^4 \cdot a} - \sqrt[4]{a^4 \cdot a} + \sqrt[4]{81a^4 \cdot a} = 2a \cdot \sqrt[4]{a} - a \cdot \sqrt[4]{a} + 3a \cdot \sqrt[4]{a} =$

$= 4a \cdot \sqrt[4]{a}.$

(összeszámoljuk a $\sqrt[4]{a}$-kat: 2a-a+3a=4a db $\sqrt[4]{a}$ van)

A (c.) feladatnál egy kis kiegészítés: $\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(a^5)^2} = \sqrt[5]{(a^2)^5} = a^2$, így ha

$\sqrt[5]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot a^2} = a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2}$ lesz, ugyanis a 12 kitevőt most úgy kell felbontani, hogy olyan legyen a kitevője, hogy 5-nek maximális többszöröse legyen, azaz most 12= 10+2= $2 \cdot 5 + 2$.

Tehát:

$$\sqrt[5]{a^7 b} + \sqrt[5]{a^{12} b^6} - \sqrt[5]{a^2 b^6} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a^2 \cdot b} + \sqrt[5]{(a^2)^5 \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot b} - \sqrt[5]{a^2 \cdot b^5 \cdot b} =$$

$$= a \cdot \sqrt[5]{a^2 b} + a^2 b \cdot \sqrt[5]{a^2 b} - b \cdot \sqrt[5]{a^2 b} = (a + a^2 b - b) \cdot \sqrt[5]{a^2 b}$$

(bekereteztem azokat, amikből 5. gyök vonható és kihozható a gyökjel elé!)

(d.) feladatnál, mivel $a^6 pozitív\ és\ negatív\ a - nál\ is\ ugyanannyi, pl. 2^6 = (-2)^6 = 64$, ezért a gyökjel elé kihozatalkor $|a|$- ket, azaz abszolútértéket veszünk.

Tehát $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

Így a feladat:

$$\sqrt[4]{625a^6} - \sqrt[4]{81a^{10}} - \sqrt[4]{a^{14}} = \sqrt[4]{\underline{625 \cdot a^4} \cdot a^2} - \sqrt[4]{\underline{81 \cdot (a^2)^4} \cdot a^2} - \sqrt[4]{\underline{(a^3)^4} \cdot a^2} =$$

$$5|a| \cdot \sqrt[4]{a^2} - 3a^2 \cdot \sqrt[4]{a^2} - |a^3| \cdot \sqrt[4]{a^2} = (5|a| - 3a^2 - |a^3|) \cdot \sqrt[4]{a^2}$$

(Aláhúztam, amit ki lehet emelni a gyökjel elé.)

Két megjegyzés:

1.) Az a^2-t azért nem tettem abszolútérték jelbe, mert ez mindig nemnegatív szám
2.) $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$, ezért az egész történet csak nemnegatív a-ra értelmes, tehát az abszolútérték jel használat szőrszálhasogatás! Ha nem tesszük ki, akkor csak azt kell mondani, hogy az a értéke nemnegatív kell legyen.

Az e.) feladatot ugyanígy ☺