

Példa egy témakörből (*Hatvány, gyök, logaritmus témakörből*):

A gyökjelek alól való kiemelés után hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$b) \sqrt[4]{16a^5} - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{81a^5};$$

$$c) \sqrt[5]{a^7b} + \sqrt[5]{a^{12}b^6} - \sqrt[5]{a^2b^6};$$

$$d) \sqrt[4]{625a^6} - \sqrt[4]{81a^{10}} - \sqrt[4]{a^{14}};$$

$$e) \sqrt[8]{a^{18}b^{23}} + \sqrt[8]{a^{10}b^{13}} - \sqrt[8]{a^{14}b^9};$$

Kezdjük a szavakkal, fogalmakkal:

- a.) **gyökkitevő**= a gyökjel bal oldalán álló szám. A b) feladatban a gyökkitevő 4, a c) feladatban 5, ... (ha nincs szám, az akkor 2-nek értendő, és négyzetgyöknek olvassuk pl. $\sqrt{5}$)
- b.) **gyökjel**= egy gyökvonásnak nevezett művelet jele, ami azt a számot állítja elő, amelyet a jelölt gyökkitevőre emelve a gyökjel alatti számot kapjuk.

Példa: $\sqrt[3]{8}$ (úgy olvassuk, hogy „harmadikgyök alatt 8, vagy gyakran azt is mondjuk, hogy köbgyök 8 a harmadikgyök helyett köbgyök szót használva”

$$\sqrt[4]{81} \text{ „negyedikgyök alatt 81”}$$

- c.) **gyökjel alól való kiemelés**= egy szorzat esetén (pl. $6 \cdot 8$) előfordul, hogy csak az egyik tényezőtől (a szorzat egyik száma) tudunk gyököt vonni és azt örömmel a gyökjel elé írjuk.
Példa: $\sqrt[3]{8}$ -ből tudunk gyököt vonni, mert találunk olyan számot, amit ha harmadik hatványra emelünk (azért harmadik hatványra, mert a gyökkitevő 3), éppen 8-at kapunk (ami a gyökjel alatt van). Tehát $\sqrt[3]{8} = 2$, mert $2^3 = 8$. DE!!! $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2 \sqrt[3]{2}$, mert a 8-ból tudunk gyököt vonni, ezt meg is tesszük (2), a másik tényezőtől nem. Így amiből tudtam, kitesszük a gyökjel elé, és amiből nem, az bent marad. EZ A KIHUZATAL A GYÖKJEL ELÉ TÖRTÉNET.
- d.) **egyszerűbb alak**= egy rövidebb, összevonás után keletkezett érték, például $x+x+x$ egyszerűbb alakban $3x$
- e.) **nemnegatív számok**= a 0 és a pozitív számok közös neve, matematikai jellel $x \geq 0$ számok

MÉG VALAMI: (érdemes átnézni a hatványozás azonosságait!)

A hatványozásnál tanultunk egy ilyesmit, hogy:

$$a^4 \cdot a = a^{4+1} = a^5 \text{ (mert ha } a \text{ van, az } a^1 \text{, amiben az } 1 \text{ – es kitevőt nem szoktuk kiírni)}$$

$$\text{És ez igaz visszafelé is: } a^5 = a^4 \cdot a$$

Szóval ebből a szorzatból negyedik gyököt vonva a kihozatal így működik:

$$\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a} = a \cdot \sqrt[4]{a}, \text{ ahol}$$

$$a > 0,$$

mert ha nem nagyobb, akkor nem tudnánk 4. gyököt vonni, mert negatív számból nem lehet

negyedik gyököt vonni, mert ha egy számot négyszer szorozok össze önmagával,

az előjel minden esetben pozitív

(azért így bontottam fel az 5 kitevőt, mert így tudok kihozni a gyökjel elé)

Akkor ezek után nézzük a feladatokat:

(b.) Úgy alakítjuk a szorzatokat, hogy tudjunk gyököt vonni. A 16-ból és 81-ből tudunk negyedik gyököt vonni, értéke 2, illetve 3, az a-kból pedig úgy vonunk gyököt, ahogy előbb mutattam:

$$\sqrt[4]{16a^5} - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{81a^5} = \sqrt[4]{16a^4 \cdot a} - \sqrt[4]{a^4 \cdot a} + \sqrt[4]{81a^4 \cdot a} = 2a \cdot \sqrt[4]{a} - a \cdot \sqrt[4]{a} + 3a \cdot \sqrt[4]{a} = 4a \cdot \sqrt[4]{a}.$$

(összeszámoljuk a $\sqrt[4]{a}$ -kat: $2a - a + 3a = 4a$ db $\sqrt[4]{a}$ van, amit így írunk: $4a \cdot \sqrt[4]{a}$, és nem szükséges kitenni a $4a$ és a gyök közé a szorzás jelét, de ha nincs kiírva, akkor is szorzásra kell gondolni)

A (c.) feladatnál egy kis kiegészítés: $\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(a^5)^2} = \sqrt[5]{(a^2)^5} = a^2$, így ha

$\sqrt[5]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot a^2} = a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2}$ lesz, ugyanis a 12 kitevőt most úgy kell felbontani, hogy olyan legyen a kitevője, hogy 5-nek maximális többszöröse legyen, azaz most $12 = 10 + 2 = 2 \cdot 5 + 2$.

Tehát:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{a^7 b} + \sqrt[5]{a^{12} b^6} - \sqrt[5]{a^2 b^6} &= \sqrt[5]{(a^5) \cdot a^2 \cdot b} + \sqrt[5]{(a^2)^5 \cdot a^2 \cdot (b^5) \cdot b} - \sqrt[5]{a^2 \cdot (b^5) \cdot b} = \\ &= a \cdot \sqrt[5]{a^2 b} + a^2 b \cdot \sqrt[5]{a^2 b} - b \cdot \sqrt[5]{a^2 b} = (a + a^2 b - b) \cdot \sqrt[5]{a^2 b} \end{aligned}$$

(bekereteztem azokat, amikből 5. gyök vonható és kihozható a gyökjel elé!)

(d.) feladatnál, mivel a^6 pozitív és negatív a - nál is ugyanannyi, pl. $2^6 = (-2)^6 = 64$, ezért a gyökjel elé kihozatalakor $|a|$ - ket, azaz abszolútértéket veszünk.

$$\text{Tehát } \sqrt[4]{a^4} = |a|$$

Így a feladat:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{625a^6} - \sqrt[4]{81a^{10}} - \sqrt[4]{a^{14}} &= \sqrt[4]{625 \cdot a^4 \cdot a^2} - \sqrt[4]{81 \cdot (a^2)^4 \cdot a^2} - \sqrt[4]{(a^3)^4 \cdot a^2} = \\ 5|a| \cdot \sqrt[4]{a^2} - 3a^2 \cdot \sqrt[4]{a^2} - |a^3| \cdot \sqrt[4]{a^2} &= (5|a| - 3a^2 - |a^3|) \cdot \sqrt[4]{a^2} \end{aligned}$$

(Aláhúztam, amit ki lehet emelni a gyökjel elé.)

Két megjegyzés:

- 1.) Az a^2 -t azért nem tettem abszolútérték jelbe, mert ez mindig nemnegatív szám
- 2.) $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$, ezért az egész történet csak nemnegatív a -ra értelmes, tehát az abszolútérték jel használat szörszálhasogatás! Ha nem tesszük ki, akkor csak azt kell mondani, hogy az a értéke nemnegatív kell legyen.

Az e.) feladatot ugyanígy ☺